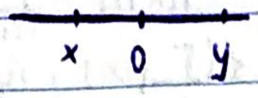
20/12/19

"ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ - ΒΑΣΙΚΟΙ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ"



$d(x,y) = |x-y|$

I) $d(x,y) \geq 0$

II) $d(x,y) = d(y,x)$

III) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$

IV) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω X σύνολο. Μια συν/ση $d: X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται μετρική αν-ν ικανοποιεί τα (I) - (IV)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω X διαν/κός χώρος του $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$). Η $\|\cdot\|$ λέγεται νόρμα αν-ν:
(I)' $\|x\| \geq 0$
(II)' $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$
(III)' $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
(IV)' $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Π.χ. X δ.χ. επί του $\mathbb{R}$

$\|\cdot\|$ νόρμα $\to d(x,y) = \|x-y\|$ μετρική

$d(x,y) = d(y,x) \Leftrightarrow \|x-y\| = \|y-x\|$

$\Leftrightarrow \|x-y\| = \|(-1)\cdot(x-y)\|$

$\Leftrightarrow \|x-y\| = |-1| \cdot \|x-y\|$ που ισχύει

$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$

$\overset{(IV)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\|$

$= d(x,z) + d(z,y)$

Παρατήρηση: Αν δεν είχαμε νόρμα αλλά μια συν/ση $\|\cdot\|' : X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί (I)', (II)', (IV)' κ. $\|x\|' = \|-x\|'$

$\Downarrow$

$d'(x,y) = \|x-y\|'$ είναι νόρμα

ΠΑΡΑΔ: $\mathbb{R}^n$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i) \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$$\|x+y\|_1 = \sum_i |x_i + y_i| \le \sum_i (|x_i| + |y_i|) = \sum_i |x_i| + \sum_i |y_i|$$

$$\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i| \to \rho_\infty(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$

$$\|x+y\|_\infty = \sup_i |x_i + y_i| \le \sup_i (|x_i| + |y_i|)$$

$$\le \sup_i |x_i| + \sup_i |y_i|$$

Όπως λέγαμε στους Απειρ.:
$A \le B + C$
$\Rightarrow \sup A \le \sup B + \sup C$

(Το ίδιο ισχύει για άπειρα i)

- $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Αν ήμασταν στο $\mathbb{C}$ θα βάζαμε μέτρο

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \left(\left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \le \left(\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \cdot \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sum x_i^2} + \cancel{\sum y_i^2} + 2 \cdot \sum x_i y_i \le \cancel{\sum x_i^2} + \cancel{\sum y_i^2} + 2 \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum x_i y_i \le \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\underline{\text{Holder}}$: $\sum |x_i y_i| \le \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $p \ge 1$, $q \ge 1$,
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow \left\{\sum |x_i + y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \underset{\uparrow \text{ Mikowski}}{\le} \left\{\sum |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum |y_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$: $p \ge 1$, $\ell^p = \left\{ (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$

$$\|(x_n)\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \text{είναι νόρμα}$$

Minkowski

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$: $C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής} \}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\|f + g\|_1 = \int_a^b |f(x) + g(x)|\,dx$$

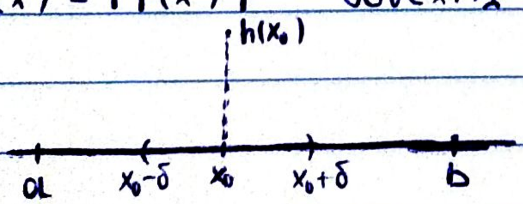
$$\le \int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right) dx \le \|f\|_1 + \|g\|_1$$

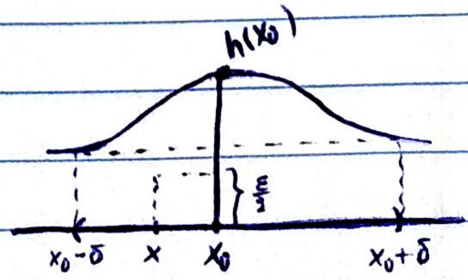
$$\|f\| = 0 \Leftarrow f = 0$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$\underline{\text{ΑΠΟΔ.}}$

$h(x) = |f(x)|$ συνεχής





$$\varepsilon = h(x_0) > 0 \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} \exists\, \delta > 0 : x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$$

$$\Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

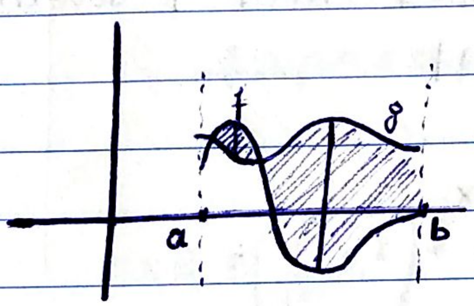
$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < h(x) - h(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \overbrace{h(x_0)}^{=\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} < h(x) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} < h(x)$$

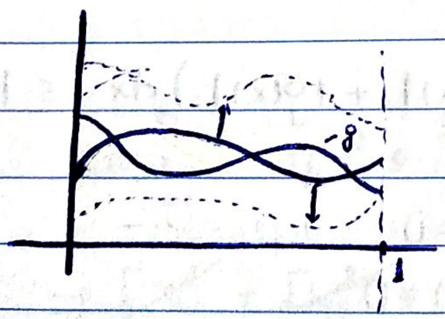
$$\int_a^b h(x)\,dx > \int_a^{x_0-\delta} 0\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} 0\,dx = \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\delta = \varepsilon\delta > 0$$

<u>ΑΤΟΠΟ</u>

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$



$$S(f, 1) = \{ f : \|f - g\|_\infty < 1 \}$$



ΠΑΡΑΔ: X σύνολο

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x=y \\ 1, & \text{αν } x\neq y \end{cases}$$

ρ μετρική (ΑΣΚΗΣΗ)

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

· Αν $x=y$: $\rho(x,y)=0$

$$\rho(x,z) + \rho(y,z) = \begin{cases} 0, & x=0=y \\ 2, & z\neq x,y \end{cases}$$

· Αν $x\neq y$: $\rho(x,y)=1$

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } z=x \text{ ή } z=y \\ 2, & \text{αν } z\neq x,y \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔ: $B([a,b]) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένη}\}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ είναι νόρμα

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

$$\ell^\infty = \{(x_n) \mid (x_n) \text{ φραγμένη}\}$$

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

ΠΑΡΑΔ: (X,ρ) μ.χ.

$\sigma(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$

Η σ είναι μετρική στο X (Ισοδύναμη φραγμ. μετρική)

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ: ΑΣΚΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1-3 : $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ κοίλη

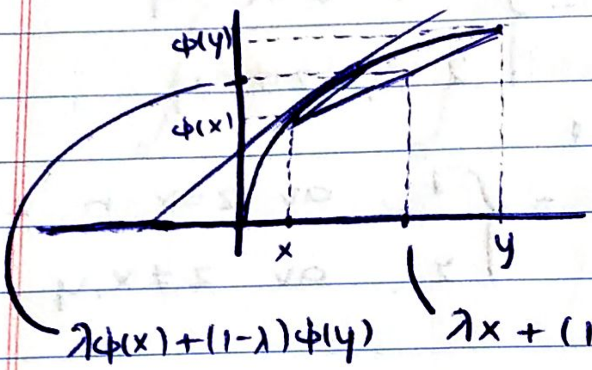
$\phi(0) = 0$, $\phi \uparrow$, $\phi(x) > 0 \quad \forall x > 0$

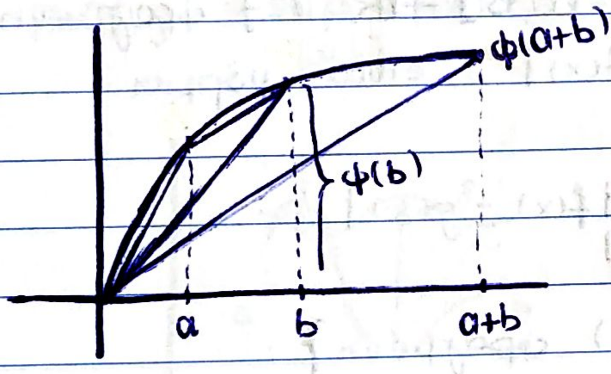
δηλ. $\phi' \downarrow$ ή $\phi'' < 0$

(π.χ. $\phi(x) = x^r$, $0 < r < 1$)

Ν.δ.ο. $\phi o \rho$ μετρική

ΛΥΣΗ:





Ιδιότητα χορδών:

$$\frac{\phi(a+b)}{a+b} \leq \frac{\phi(b)}{b} \leq \frac{\phi(a)}{a} \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\phi(b)}{b} \leq \frac{\phi(a)}{a} \leq \frac{\phi(b)+\phi(a)}{b+a} \quad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow \phi(a+b) \leq \phi(a) + \phi(b) \quad (3)$

(I) $\phi(p(x,y)) \geq 0 \quad (p(x,y) \geq 0)$

(II) $p(x,y) = p(y,x) \Rightarrow \phi(p(x,y)) = \phi(p(y,x))$

(III) $\phi(p(x,y)) = 0 \Rightarrow p(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

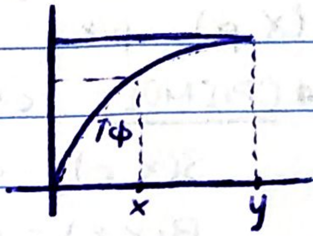
(IV) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$

$$\overset{\phi \uparrow}{\Rightarrow} \phi(p(x,y)) \leq \phi(p(x,z) + p(z,y))$$

$$\underset{(3)}{\leq} \phi(p(x,z)) + \phi(p(z,y))$$

ΠΑΡΑΔ. Κοίλης Συνθέσης:

$$\phi(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0$$



$\phi(0) = 0$, $\phi \uparrow$ & κοίλη

$(\mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|)$

$\downarrow$

$$\sigma(x,y) = \phi \circ d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ 1-4: $C([a,b])$, $0<r<1$

$$\|f\|_r = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|^r$$

$$|f(x) + g(x)|^r \leq (|f(x)| + |g(x)|)^r \leq |f(x)|^r + |g(x)|^r$$

$(\cdot)^r \uparrow$ $(\cdot)^r$ κοίλη

$$\Rightarrow \|f+g\|_r \leq \|f\|_r + \|g\|_r$$

$$\|\lambda f\|_r = \sup_x |\lambda f(x)|^r = |\lambda|^r \cdot \sup_x |f(x)|^r = |\lambda|^r \cdot \|f\|_r$$

$$\|-f\|_r = \|f\|_r$$

$$d(f,g) = \|f-g\|_r$$